Δώδεκα Αποδείξεις του

Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας

Μία εκδοχή της αρχικής απόδειξης του Gauss

$$f(z) = T(z) + iU(z)$$

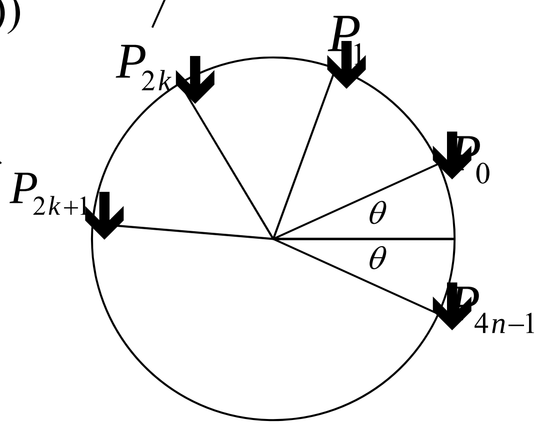
$$T = r^n \cos n\phi + Ar^{n-1} \cos((n-1)\phi + \alpha) + \cdots + L \cos \lambda$$

$$U = r^n \sin n\phi + Ar^{n-1} \sin((n-1)\phi + \alpha) + \cdots + L \sin \lambda$$

$$\phi = (\theta + 2k\,(2\theta)) = (4k+1)\,\frac{\pi}{4n}$$

$$\phi' = (\theta + (2k+1)\,(2\theta))$$

$$= (4k+3)\,\frac{\pi}{4n}$$



$$\Theta = 2\theta = \frac{\pi}{2n}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4n}$$

$$\cos(n\phi) = (-1)^{k}\,\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad T(r,\phi)$$

$$\cos(n\phi') = (-1)^{k+1}\,\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad T(r,\phi')$$

$$\exists R \in \mathbb{R}: \quad \forall\, r > R \qquad (-1)^k T \geq \frac{r^n}{\sqrt{2}} - Ar^{n-1} - \cdots - L > 0$$

$$(-1)^{k+1} T \geq \frac{r^n}{\sqrt{2}} - Ar^{n-1} - \cdots - L > 0$$

$$\Downarrow$$

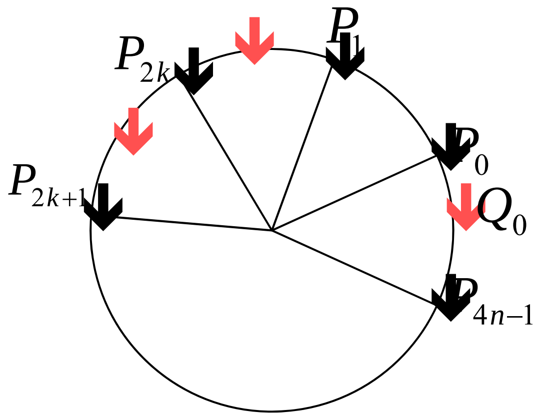
τουλάχιστον $2n$ ρίζες

$$f(z) \xrightarrow{\zeta = \tan(\phi/2)} T = \frac{p_{2n}(\zeta)}{(1+\zeta^2)^n} \qquad p_{2n}(\zeta) \text{ βαθμού } \geq 2$$

$2n$ ρίζες $\quad Q_0, Q_1, \ldots, Q_{2n-1}$

$$\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{2n-1}$$

η περιφέρεια ενός κύκλου $r > R$ θα αποτελείται από τόξα, εντός των οποίων το T λαμβάνει εναλλακτικώς θετικές και αρνητικές τιμές



Λήμμα 2.2: Το $|p(z)|$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $z_0 \in \mathbb{C}$

Λήμμα 2.3 : Αν $p(z)$ μη σταθερό

τότε $p(z_0) = 0$

<u>1η απόδειξη</u>

Το ελάχιστο επί ενός συμπαγούς συνόλου θα βρίσκεται στο εσωτερικό του

Αρχή Ελαχίστου

Το $p(z)$ είναι σταθερό σε κάποια ανοικτή περιοχή

Άτοπο

<u>4η απόδειξη</u>

κοινό
βήμα

$p(z)$ δεν έχει ρίζες στο 🕛

$$\Downarrow$$

$f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ αναλυτική στο 🕛

2η απόδειξη	3η απόδειξη	5η απόδειξη	12η απόδειξη
Θ.Cauchy - Goursat + Λήμμα της Αύξησης	Ολοκληρω-τικός Τύπος Cauchy	Θ.Liouville	Τύπος του Ito + Ιδιότητες Κίνησης Brown

φράσσουμε την f

και καταλήγουμε σε άτοπο

Το Θεώρημα Liouville:

(1) Εάν η $f(z)$ είναι μια ακέραια συνάρτηση και η $|f(z)|$ φραγμένη για όλες τις τιμές του $z \in \mathbb{C}$, τότε η $f(z)$ είναι σταθερή.

(2) Γενικότερα, εάν η $|f^{(n)}(z)|$ είναι φραγμένη σε όλο το $\mathbb{C}$, τότε η $f(z)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n+1$.

5η Απόδειξη του Θ.Θ.Α.

$$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right| \to |a_n| \quad \text{, όταν } \; z \to \infty$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon = \frac{|a_n|}{2} > 0 \quad \exists r > 0 : (\forall z : |z| > r) \left(\left| \frac{|P(z)|}{|z^n|} - |a_n| \right| < \frac{|a_n|}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r^n}{2}|a_n| < |P(z)|$$

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} \qquad \text{αναλυτική στο } \mathbb{C}$$

- Για $\left|z\right| > r$ $\quad \left|f(z)\right| = \left|\frac{1}{P(z)}\right| < \frac{2}{r^{n}\,|\,a_n\,|}$

- Για $|\,z\,| \leq r$ $\quad f$ συνεχής στο $K = \{z : \left|z\right| \leq r\}$

$$\Downarrow$$

f φραγμένη στο $K = \{z : \left|z\right| \leq r\}$

$$\Downarrow$$

$\left|f(z)\right|$ φραγμένη στο $K = \{z : \left|z\right| \leq r\}$

$\left|f(z)\right|$ φραγμένη

στο $\mathbb{C}$

$\Big\downarrow$ Θ. Liouville

f σταθερή

Θεώρημα 4.100: Κάθε πραγματικό πολυώνυμο περιττού βαθμού
έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Λήμμα 4.101: Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο δευτέρου βαθμού
διαθέτει μία μιγαδική ρίζα.

Λήμμα 4.102: Εάν ισχύει ότι κάθε μη σταθερό πραγματικό πολυώνυμο
έχει μία μιγαδική ρίζα,

$\Downarrow$ τότε ισχύει και ότι

κάθε μη σταθερό μιγαδικό πολυώνυμο
έχει μία μιγαδική ρίζα.

Λήμμα 4.103: Κάθε μη σταθερό πραγματικό πολυώνυμο έχει μία μιγαδική ρίζα

Απόδειξη : Με επαγωγή ως προς τον βαθμό n του

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$$

Ορισμός 4.59: Ένα σώμα E λέγεται **επέκταση** ενός σώματος F αν το F είναι υπόσωμα του E . (Συμβολ. $F \leq E$)

Θεώρημα(Kronecker) : Έστω F ένα σώμα και $f(x)$ ένα μη σταθερό πολυώνυμο στον $F[x]$.

Τότε υπάρχει μια επέκταση σώματος E του F και κάποιο $\alpha \in E$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha)=0$.

α **αλγεβρικό** πάνω από το F

αν $f(\alpha)=0$ για κάποιο μη μηδενικό

$f(x) \in F[x]$

($\neq$ **υπερβατικό**)

$$\begin{tikzcd} \alpha \in E \arrow[d, dash] & \\ F \arrow[r, dash] & F[x] \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ $\exists!$ ανάγωγο πολυώνυμο $p(x) \in F[x]$ τέτοιο ώστε $p(\alpha)=0$

$$||$$

$$\boxed{irr(\alpha, F)}$$

Συμβολίζουμε $\deg(\alpha, F) = \deg(irr(\alpha, F))$

E **απλή επέκταση** του F

$\boxed{E = F(\alpha)}$: το μικρότερο σώμα που περιέχει το F

και το α ($\alpha \in E$ αλγεβρικό ή υπερβατικό

πάνω από το F)

Κάθε στοιχείο $\beta \in E = F(\alpha)$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$\beta = b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{n-1}\alpha^{n-1} \quad :$$

όπου $b_i \in F$,

$n = \deg(\alpha, F)$

$[E : F]$ = ο βαθμός του E ως διανυσματικός χώρος πάνω από το F

$[E:F]$ = ο βαθμός του E ως διανυσματικός χώρος πάνω από το F

Αν $F \leq E \leq K$ ισχύει :

$$[K:F]=[K:E][E:F]$$

- E **αλγεβρική επέκταση** του F αν κάθε στοιχείο του

  είναι αλγεβρικό πάνω από το F

- **αλγεβρική θήκη** του F στο E

  $\overline{F}_E = \{\alpha \in E \mid$ το α είναι αλγεβρικό πάνω από το $F\}$

- Ένα σώμα F λέγεται **αλγεβρικά κλειστό** αν

  κάθε μη σταθερό πολυώνυμο στον $F[x]$ έχει μία ρίζα στο F.

.

Σώμα Ριζών

Ένα σώμα $E \le \overline{F}$ λέγεται **το σώμα ριζών του** $\{f_i(x) \mid i \in I\}$ **πάνω από το** F

αν το E είναι *το μικρότερο υπόσωμα της* $\overline{F}$ *που περιέχει το* F *και όλες τις ρίζες στην* $\overline{F}$ *καθενός από τα* $f_i(x), i \in I$

Για E σώμα ριζών

$\Rightarrow$ Κάθε ανάγωγο πολυώνυμο στον $F[x]$ που έχει μία ρίζα στο E αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων στο $E[x]$

$G(E \mid F)$: ομάδα αυτομορφισμών του E που αφήνουν το F σταθερό $\leq$ ομάδα αυτομορφισμών του E

$\{E : F\}$: το πλήθος των ισομορφισμών του E επί ενός υποσώματος της $\overline{F}$ που αφήνουν το F σταθερό

Αν $F \leq E \leq K$ ισχύει : $\{K : F\} = \{K : E\}\{E : F\}$

$\alpha, \beta \in E$ **συζυγή πάνω από το** F

αν $irr(\alpha, F) = irr(\beta, F)$

<u>Θεώρημα</u>

$$F(\alpha) \xrightarrow[\text{Ισομορφισμός που αφήνει το } F \text{ σταθερό}]{\psi} \overline{F} \Longrightarrow \psi(\alpha) = \beta$$

, όπου β συζυγές του α πάνω από το F

$\forall \beta$ συζυγές του α πάνω από το F $\Longrightarrow \exists! \; \psi : F(\alpha) \xrightarrow[\text{Ισομορφισμός που αφήνει το } F \text{ σταθερό}]{\psi} \overline{F}$ και $\psi(\alpha) = \beta$

Μία πεπερασμένη επέκταση E του F λέγεται **διαχωρίσιμη** επέκταση του F

αν $[E:F] = \{E:F\}$

$\alpha \in F$ διαχωρίσιμο πάνω από το F αν $F(\alpha)$ διαχωρίσιμη επέκταση του F

$$\{F(\alpha):F\} = [F(\alpha):F]$$

Το πλήθος των ισομορφισμών του $F(\alpha)$ επί ενός υποσώματος της $\overline{F}$ που αφήνουν το F σταθερό

$\|$

Το πλήθος των συζυγών στοιχείων του α πάνω από το F

$\deg(\alpha, F)$

Άρα, το α είναι διαχωρίσιμο πάνω από το F

$$\Leftrightarrow$$

όλες οι ρίζες του $irr(\alpha, F)$ έχουν πολλαπλότητα 1

Θεώρημα : Κάθε πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση ενός σώματος είναι απλή επέκταση

Ένα σώμα λέγεται **τέλειο** αν κάθε πεπερασμένη επέκτασή του είναι διαχωρίσιμη επέκταση.

Θεώρημα 5.29: Κάθε σώμα χαρακτηριστικής μηδέν είναι τέλειο.

$$\nexists\ n \neq 0 : n \cdot a = a + a + \cdots + a = 0 \quad \forall a \in F$$

π.χ. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Πόρισμα 5.33: Κάθε πεπερασμένη επέκταση ενός σώματος χαρακτηριστικής μηδέν είναι απλή επέκταση

Ορισμός 5.34: Μία πεπερασμένη επέκταση K του F λέγεται πεπερασμένη **κανονική επέκταση** του F αν το K είναι διαχωρίσιμο σώμα ριζών πάνω από το F.

$G(K \mid F)$: ομάδα αυτομορφισμών του K που αφήνουν το F σταθερό $\leq$ ομάδα αυτομορφισμών του E

Αν K πεπερασμένη κανονική επέκταση του F ,

$G(K \mid F)$: ομάδα Galois του K πάνω από F

Το Βασικό Θεώρημα της Θεωρίας Galois

K κανονική επέκταση ενός σώματος F

$F \leq E \leq K$

$$[K:E] = \left| G(K \mid E) \right|$$

$$[E:F] = (G(K \mid F) : G(K : E))$$

Τα Θεωρήματα Sylow

G **p-ομάδα** : κάθε στοιχείο της G έχει τάξη κάποια δύναμη του πρώτου αριθμού p

1ο Θεώρημα Sylow :

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ ομάδα} \\ |G| = p^n m \quad , (p,m)=1 \\ \qquad n \geq 1 \end{array}\right\} \text{ Η } G \text{ περιέχει μια υποομάδα τάξης } p^i, \quad 1 \leq i \leq n$$

7η Απόδειξη του Θ.Θ.Α.

Το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι αλγεβρικά κλειστό σώμα.

Έστω $\mathbb{R} \leq K$

$$[K : \mathbb{R}] = 2^m q \qquad (2, q) = 1$$

$\mathbb{R}$ τέλειο $\Rightarrow$ K διαχωρίσιμη $\Rightarrow$ K απλή $\Rightarrow$ $K = \mathbb{R}(\alpha)$

- $m = 0 \qquad irr(\alpha, \mathbb{R}) = q \quad \Rightarrow \quad K = \mathbb{R}$

- $m > 0$

$$\xrightarrow[\text{της Θεωρίας Galois}]{\text{Βασικό Θεώρημα}} \quad |G(K \mid \mathbb{R})| = [K : \mathbb{R}] = 2^m q$$

$$\Big\downarrow \text{ 1ο Θ.Sylow}$$

$$\exists \; G(K \mid E) \leq G(K : \mathbb{R}) \quad \text{τ.ω.} \quad |G(K \mid E)| = 2^m$$

Τότε για το ενδιάμεσο σώμα E έχουμε : $[K : E] = 2^m$

$$[E : \mathbb{R}] = q \xrightarrow{q = 1} E = \mathbb{R}$$

$$|G(K\,|\,\mathbb{R})| = [K:\mathbb{R}] = 2^m$$

$$\Big\downarrow [\mathbb{C}:\mathbb{R}]=2$$

$$[K:\mathbb{C}] = 2^{m-1}$$

$$\Big\downarrow \text{1o Θ.Sylow}$$

$$\exists\ G(K\,|\,E) \le G(K:\mathbb{C}) \quad \text{τ.ω.} \quad |G(K\,|\,E)| = 2^{m-2}$$

Τότε για το ενδιάμεσο σώμα E έχουμε : $[K:E] = 2^{m-2}$

$$[E:\mathbb{C}] = 2 \xrightarrow{E=\mathbb{C}(\alpha)} \deg irr(\alpha, \mathbb{C}) = 2$$

άτοπο

$$\Rightarrow K = \mathbb{C}$$

■

Αλγεβρική Τοπολογία

Θεωρία Ομοτοπίας

9η απόδειξη

Θεωρία Ομολογίας

10η απόδειξη

11η απόδειξη

δρόμος σε έναν τοπολογικό χώρο X είναι μία συνεχής απεικόνιση

$$\alpha : [0,1] \to X$$

Ένας **βρόχος βασισμένος στο** $x_0 \in X$ είναι ένας δρόμος α

με $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$,

δηλαδή ένας δρόμος με αρχικό και τελικό σημείο το x_0 .

f g βρόχοι βασισμένοι στο x_0

$$f \circ g(x) = \begin{cases} f(2x) & , \quad 0 \le t \le 1/2 \\ g(2x-1) & , \quad 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Θεωρία Ομοτοπίας

X, Y τοπολογικοί χώροι $f : X \to Y$ $g : X \to Y$ συνεχείς

f **ομοτοπική** της g όταν $\exists$ $H : X \times I \to Y$ συνεχής

$f \simeq g$ τ.ω. $H(x,0) = f(x)$

$\forall\ x \in X$

$H(x,1) = g(x)$

ομοτοπία

σχέση ισοδυναμίας

$[f]$: κλάση ομοτοπίας της f

X, Y τ.χ. **ομοτοπικοί** $\exists$ $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ συνεχείς

τ.ω. $g \circ f \simeq id : X \to X$

$$f \circ g \simeq id : Y \to Y$$

συσταλτός τ.χ. $\longrightarrow$ ομοτοπικός με ένα σημείο

$\pi_1(X, x_0)$ **θεμελιώδης ομάδα του** X

που βασίζεται στο x_0

(Το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας των βρόχων που βασίζονται στο $x_0 \in X$, με πράξη την $[f][g] = [f \circ g]$)

Θεώρημα :

$$\Phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1) \quad \text{ισομορφισμός}$$

$$n \mapsto [\omega_n] \qquad \omega_n(s) = (\cos 2\pi ns,\ \sin 2\pi ns)$$

βρόχος με βάση το (1,0)

9η απόδειξη του Θ.Θ.Α.

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{\left| p(re^{2\pi i s})/p(r) \right|}$$ ομοτοπία βρόχων βασισμένων στο (1,0)

f_0 ο τετριμμένος βρόχος $\Longrightarrow$ $\pi_1(S^1)$ $[f_r] = 0$

Για $|z| = r > \max\{|a_1| + \cdots + |a_n|, 1\}$

$$\Rightarrow \quad |z^n| \geq |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$$

$$\Rightarrow \quad p_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n) \underset{\substack{|z|=r \\ 0 \leq t \leq 1}}{\neq} 0$$

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{\left|p(re^{2\pi is})/p(r)\right|} \xrightarrow{\; p \mapsto p_t \;} \frac{p_t(re^{2\pi is})/p_t(r)}{\left|p_t(re^{2\pi is})/p_t(r)\right|}$$

ομοτοπία

$$t = 0 \qquad\qquad t = 1$$

$$\omega_n(s) \quad \longleftrightarrow \quad f_r(s)$$

$$[\omega_n] = [f_r] = 0$$

$$n = 0$$

■

Θεωρία Ομολογίας

$v_0, v_1, \ldots, v_k \in E^n$ παράγουν ένα υπερεπίπεδο

είναι σε *γενική θέση :* κάθε υποσύνολό τους παράγει ένα μικρότερο υπερεπίπεδο

$v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ γραμμικά ανεξάρτητα

k**-διάστατο μονόπλοκο :** το μικρότερο κυρτό σύνολο που τα περιέχει προσανατολισμένο k-**διάστατο μονόπλοκο**

π.χ. προσανατολισμένο **3-διάστατο μονόπλοκο**

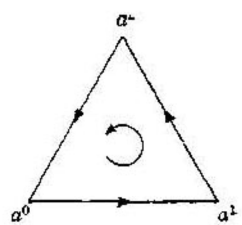


Fig. 2.1

$v_0 v_1 \ldots v_q$ προσανατολισμένο q**- μονόπλοκο**

$i-$ **στή έδρα** $i = 0, \ldots, q$

είναι το προσανατολισμένο $(q-1)$ –μονόπλοκο : $(-1)^i v_0 v_1 \ldots \overline{v}_i \ldots v_q$

απαλοιφή του σημείου v_i

σύνορο του προσανατολισμένου $q-$ μονοπλόκου $v_0 v_1 \ldots v_q$

$$\partial(v_0 v_1 \ldots v_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i v_0 \ldots \overline{v}_i \ldots v_q$$

π.χ. $\partial(v_0) = 0$

$\partial(v_0 v_1) = v_1 - v_0$

$\partial(v_0 v_1 v_2) = v_1 v_2 - v_0 v_2 + v_0 v_1$

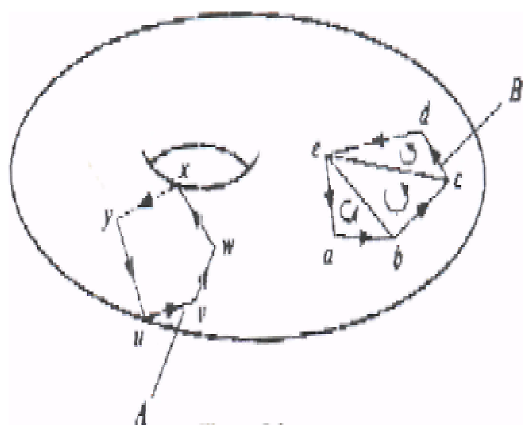
Μία πεπερασμένη συλλογή προσανατολισμένων μονοπλόκων σε κάποιον Ευκλείδιο χώρο E^n ονομάζεται **μονοπλεκτικό σύμπλεγμα** αν ισχύει ότι :

- όταν ένα μονόπλοκο ανήκει στη συλλογή αυτή
  τότε και κάθε του έδρα ανήκει σ’αυτή τη συλλογή

- όταν δύο μονόπλοκα έχουν μή κενή τομή,
  τέμνονται σε μία κοινή έδρα.

Μία **τριγωνοποίηση** ενός τοπολογικού χώρου X αποτελείται από ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K και έναν ομοιομορφισμό $h : |K| \to X$.

π.χ. τριγωνοποίηση του τόρου



X μονοπλεκτικό σύμπλεγμα τ.ω. : σε κάθε διάσταση q υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους $q-$μονόπλοκα

- Η ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση τα $n-$μονόπλοκα στο X $\longrightarrow$ $C_n(X)$

$n-$**διάστατη ομάδα αλυσίδων**

- ο ομομορφισμός που προκύπτει με επέκταση του συνοριακού τελεστή επί των μονοπλόκων $\longrightarrow$ $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$

συνοριακός ομομορφισμός

$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$

- $\ker \partial_n \longrightarrow \boxed{Z_n(X)}$

  $n-$**διάστατη ομάδα κυκλημάτων**

- $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \longrightarrow \boxed{B_n(X)}$

  $n-$**διάστατη ομάδα συνόρων**

- $\boxed{Z_n(X)/B_n(X) := H_n(X)}$ $n-$**διάστατη ομάδα ομολογίας**

Λήμμα : Η σύνθεση $C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}$

είναι ο μηδενικός ομομορφισμός

$$C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}$$

$$\supseteq$$

$$\boxed{Z_n = \ker \partial_n}$$

$$\supseteq$$

$$B_n = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$$

$$Z_n / B_n = H_n$$

Θεώρημα της ιδιότητας του αναλλοιώτου :

Έστω X τ.χ. με μία τριγωνοποίηση.

⮡ Οι ομάδες ομολογιών που καθορίζονται από αυτήν την συγκεκριμένη τριγωνοποίηση είναι ισόμορφες με τις αντίστοιχες ομάδες που καθορίζονται από οποιαδήποτε άλλη τριγωνοποίηση του X

Θεώρημα 7.29:

Έστω X, Y τ.χ. με τριγωνοποιήσεις

- $h : X \to Y$ συνεχής $\xrightarrow{\text{επάγεται}}$ $h^* : H_n(X) \to H_n(Y)$ ομομορφισμός $\forall\, n$

- $h : X \to Y$ ομοιομορφισμός $\xrightarrow{\text{επάγεται}}$ $h^* : H_n(X) \to H_n(Y)$ ισομορφισμός

+

X, Y ομοτοπικοί $\longrightarrow$ οι ομολογικές τους ομάδες είναι ισόμορφες

Θεώρημα :

Έστω X συσταλτός χώρος $\Longrightarrow$ $H_0(X) = \mathbb{Z}$

$$H_n(X) = 0$$

<u>Απόδειξη</u> :

X συσταλτός χώρος $\Longrightarrow$ X ομοτοπικός ενός σημείου

Η ομολογία ενός συσταλτού χώρου ταυτίζεται
Με την ομολογία ενός σημείου

$$H_0(v) = Z_0(v) / B_0(v)$$

$\mathbb{Z}$ 0

Θεώρημα 7.31:

Έστω X μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με n συνεκτικές συνιστώσες.

$\Longrightarrow$ $H_0(X) =$ μία ελεύθερη αβελιανή ομάδα τάξης $n \cong \mathbb{Z}^n$

<u>Απόδειξη</u> :

Σε κάθε συνιστώσα του X κάθε κορυφή $v \in Z_0(X) = \ker\partial_0(X)$

Έστω $v_0, v_1, \ldots, v_k$ οι κορυφές μιας συνιστώσας

$$v_k = v_0 + (v_1 - v_0) + \cdots + (v_k - v_{k-1})$$

$$B_0(X) = \operatorname{Im}\partial_{n+1}(X)$$

Κάθε κορυφή της συνιστώσας ανήκει στο ίδιο σύμπλοκο

της $Z_0(X)$ ως προς την $B_0(X)$

$$\Longrightarrow \qquad H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X)$$

ελεύθερη αβελιανή ομάδα τάξης ένα,

που έχει ως βάση μία και μόνον κορυφή

Τα ίδια ισχύουν και για κάθε άλλη συνεκτική συνιστώσα.

■

Θεώρημα 7.32:

Εάν το X είναι ένα δρομοσυνεκτικό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα,

τότε:

.

$$H_1(X) = \pi_1(X)^{ab}$$

Παράδειγμα

Τριγωνοποίηση της σφαίρας S^2

S^2 συνεκτική $\Longrightarrow$ $H_0(S^2) = \mathbb{Z}$

$$H_1(S^2) = \pi_1(S^2) = 0$$

$$H_2(S^2) = \mathbb{Z}$$

$$H_n(S_n) = 0 \qquad n \neq 0, 2$$

Θεώρημα 7.33:

Έστω S^n $n \geq 1$

$$H_0(S^n) = \mathbb{Z}$$

$$H_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

$$H_q(S^n) = 0 \qquad n \neq q$$

Βαθμός Brouwer

$$f : S^n \to \Sigma^n \xrightarrow{\text{επάγει}} f^* : H_n(S^n) \to H_n(\Sigma^n)$$ ομομορφισμός

συνεχής

$$< \alpha > \qquad\qquad < \beta >$$

$$f^*(\alpha) = m\beta \qquad m \in$$

βαθμός Brouwer $\boxed{m = \deg f}$

Λήμμα 7.34: Ο βαθμός μιας απεικόνισης δεν εξαρτάται από τις μονοπλεκτικές αναλύσεις των S^n και Σ^n

Λήμμα 7.35:

- δύο ομοτοπικές απεικονίσεις $f : S^n \to \Sigma^n$ $g : S^n \to \Sigma^n$ έχουν τον ίδιο βαθμό
- αν δύο συνεχείς απεικονίσεις $f : S^n \to \Sigma^n$ $g : S^n \to \Sigma^n$ έχουν τον ίδιο βαθμό $\Rightarrow$ είναι ομοτοπικές

Θεώρημα 7.36: Αν $f : S^n \to \Sigma^n$ συνεχής, με $\deg(f) \neq 0 \Rightarrow$ η f είναι επί

Λήμμα 7.38: Η $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ είναι ομοτοπική της $f(z) = z^n$

(Απόδειξη : $H(z,t) = z^n + (1-t)(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1})$)

Λήμμα 7.39: Ο βαθμός Brouwer της $f(z) = z^n$ ισούται με n

Επομένως, για τα μιγαδικά πολυώνυμα, ο βαθμός Brouwer

και ο πολυωνυμικός βαθμός ταυτίζονται.

<u>10η απόδειξη του Θ.Θ.Α.</u>

$\xrightarrow{\textbf{Λήμμα 7.38}}$ $P(z)$ ομοτοπική της $f(z) = z^n$

$\xrightarrow{\textbf{Λήμμα 7.39}}$ $\deg(P(z)) = n \neq 0$ $\xrightarrow{\text{Θεώρημα 7.36}}$ Κάθε σημείο της S^2 ανήκει στην εικόνα του $P(z)$

$$\Rightarrow \exists\, z_0 \in S^2 : P(z_0) = 0$$

$\big\downarrow$ στερεογραφική προβολή

$z_0 \in$ 🕛

■